

ოქმი #7

თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს 2023 წლის 21 ივნისის სხდომისა

სხდომას ესწრებოდნენ:

სამეცნიერო საბჭოს წევრები: თ. ქადეიშვილი (საბჭოს თავ-რე), მ. აშორდია, გ. ბერიკელაშვილი, ა. ელაშვილი, მ. ელიაშვილი, დ. კაპანაძე, ა. კვინიხიძე, მ. მანია, ბ. მესაბლიშვილი, ა. მესხი, ნ. ფარცვანია, ნ. შავლაყაძე, ო. ჭკადუა, გ. ჯორჯაძე, ო. ჯოხაძე (სამეცნიერო საბჭო შედგება 29 წევრისაგან, სხდომას ესწრებოდა 15 წევრი).

სხდომას ასევე ესწრებოდა მათემატიკური ანალიზის განყოფილების უფროსი მეცნიერი თანამშრომელი ომარ მაგნიძე.

დღის წესრიგი:

1. ომარ მაგნიძის სახელმძღვანელოს „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ დასაბეჭდად წარდგენის საკითხის განხილვა.

მ ო ი ს მ ი ნ ე ს : ინსტიტუტის დირექტორის ნინო ფარცვანიას გამოსვლა, რომელმაც საბჭოს წევრებს მოახსენა, რომ ინსტიტუტის მათემატიკური ანალიზის განყოფილების უფროსმა მეცნიერ თანამშრომელმა ომარ მაგნიძემ გამოსაცემად მოამზადა სახელმძღვანელო „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“. წარმოდგენილია ინსტიტუტის მათემატიკური ანალიზის განყოფილების ხელმძღვანელის ალექსანდრე მესხის წარდგინება ო. მაგნიძის სახელმძღვანელოს თსუ-ს გამომცემლობაში დაბეჭდვასთან დაკავშირებით და ა. მესხისა და ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტის პროფესორის გიორგი ონიანის რეცენზია აღნიშნულ სახელმძღვანელოზე (ა. მესხის წარდგინება და ა. მესხისა და გ. ონიანის რეცენზია ოქმს თან ერთვის).

მ ო ი ს მ ი ნ ე ს : ინსტიტუტის მათემატიკური ანალიზის განყოფილების უფროსი მეცნიერი თანამშრომლის ომარ მაგნიძის გამოსვლა, რომელმაც ისაუბრა სახელმძღვანელოს შესახებ. მან აღნიშნა, რომ ეს სახელმძღვანელო წარმოადგენს 2015 წელს მის მიერ თსუ-ს გამომცემლობაში გამოქვეყნებული სახელმძღვანელოს „ფურიეს მწკრივები“ გაფართოებულ ვარიანტს.

მ ო ი ს მ ი ნ ე ს : ინსტიტუტის თეორიული ფიზიკის განყოფილების ხელმძღვანელის მ. ელიაშვილის გამოსვლა, რომელმაც აღნიშნა, რომ ო. მაგნიძის სახელმძღვანელო არა მარტო მათემატიკის, არამედ ფიზიკის მიმართულების სტუდენტებისთვისაც მეტად მნიშვნელოვანი და საჭიროა. მ. ელიაშვილმა დადებითად შეაფასა ო. მაგნიძის ნაშრომი და მხარი დაუჭირა მისი თსუ-ს გამომცემლობაში გამოქვეყნების საკითხს.

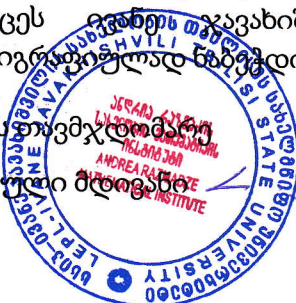
ასევე დადებითი შეფასებები მოჰყვა ო. მაგნიძის ნაშრომს საბჭოს სხვა წევრებისგანაც. ერთხმად გამოითქვა მოსაზრება ხსენებული ნაშრომის გამოცემის მიზანშეწონილობის შესახებ პოლიგრაფიულად ნაბეჭდი წიგნის სახით.

კენჭისყრაზე დადგა საკითხი ო. მაგნიძის სახელმძღვანელოს „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ თსუ-ს მიერ გამოცემის თაობაზე.

ჩ ა ტ ა რ და ღ ი ა კ ე ნ ჭ ი ს ყ რ ა. კენჭისყრის შედეგები: მომხრე - 15, წინააღმდეგი - 0.

და ა დ გ ი ნ ე ს : ღია კენჭისყრის შედეგების საფუძველზე ერთხმად თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭომ მიზანშეწონილად ჩათვალა ომარ მაგნიძის სახელმძღვანელოს „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ გამოიცეს ღია კენჭისყრის შედეგების საფუძველზე დაბეჭდვის სახით. უნივერსიტეტის მიერ პოლიგრაფიულად ნაბეჭდი წიგნის სახით.

საბჭოს თავმჯდომარე  თ. ქადეიშვილი
სწავლული მდივანი  ო. ჯოხაძე



თსუ ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის
დირექტორს ქალბატონ ნინო ფარცვანიას,
ამავე ინსტიტუტის მათემატიკური ანალიზის
განყოფილების ხელმძღვანელის
ალექსანდრე მესხის

გ ა ნ ც ხ ა დ ე ბ ა

ქალბატონო ნინო,

მოგმართავთ თხოვნით ინსტიტუტის უახლოეს საბჭოს სხდომაზე მოხდეს ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-თანამშრომლის ბატონი ომარი ძაგნიძის სახელმძღვანელოს „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ თსუ-ს გამომცემლობაში გამოქვეყნების შესაძლო რეკომენდაციის განხილვა. აღნიშნული სახელმძღვანელო წარმოადგენს ამავე ავტორის 2015 წელს თსუ-ს გამომცემლობაში გამოქვეყნებული სახელმძღვანელოს „ფურიეს მწკრივები“ გაფართოებულ ვარიანტს.

განცხადებას თან ახლავს განსახილველი სახელმძღვანელოს რეცენზია, რომელსაც ხელს ვაწერთ მე, ალექსანდრე მესხი და ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტის პროფესორი გიორგი ონიანი.

პატივისცემით,

ალექსანდრე მესხი



29.05.2023

რ ე ც ე ნ ზ ი ა

ომარ ძაგნიძის წიგნზე „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“

ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემის განხილვისას განსაკუთრებული ყურადღება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემისადმი, სიმბოლურად (T) სისტემისადმი, გამოწვეულია იმით, რომ წარმოსადგენ ფუნქციას (T) სისტემა უყენებს გაცილებით სუსტ პირობას, ვიდრე ალგებრული (A) სისტემა: (T) სისტემისთვის საკმარისია პირველი რიგის წარმომებულის არსებობა და ეს მაშინ, როცა (A) სისტემისთვის ყველა რიგის წარმომებულის არსებობაც კი არ კმარა!

ომარ ძაგნიძის 381 გვერდიანი სარეცენზიო წიგნი ოთხნაწილიანია.

ხუთი თავისგან შედგენილ I ნაწილში შეტანილია ავტორის მიერ 2015 წელს გამოცემული (თსუ), გადამუშავებული და გაფართოებული „ფურიეს მწკრივები“. სახელდობრ, I თავში გადმოცემულია ძირითადი ცნებანი; II თავში – ფურიეს მწკრივთა ზოგადი საკითხები; III თავში – ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ზოგადი საკითხები; IV თავში – ფურიეს მწკრივთა კრებადობის საკითხები, რომელშიც დამატებულია ფურიეს მწკრივის კრებადობის რიმანის ნიშანი და ფურიეს მწკრივის (საზოგადოდ, განშლადის) წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერების შესახებ ლებეგის თეორემის შეზღუდული თეორემა; V თავში – რიცხვითი და ფურიეს მწკრივების სხვადასხვა მეთოდით შეჯამებადობის საკითხები; ამ თავში დამატებულია რიმანის მწკრივის კერძო ჯამისთვის ორმაგი ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა და ამ პირობის გამოყენება ა. კოლმოგოროვის ყველგან განშლად ფურიეს მწკრივისთვის.

სარეცენზიო წიგნის II, III, IV ნაწილები მიძღვნილია ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციებისთვის ფურიეს ორმაგი და ერთგანზომილებიანი მწკრივისადმი (ცვლადი კოეფიციენტებით).

მიუხედავად იმისა, რომ ფურიეს ჯერადმა ტრიგონომეტრიულმა მწკრივებმა გამოყენება ჰპოვა პროგნოზირების თეორიაში (იხ. Helson H. and Lowdenslager D., *Acta Math.* **99** (1958), no. 3-4, 165-202; II – *Acta Math.* **106** (1961), no. 3-4, 175-213), ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოდგენის საკითხში ფურიეს ორჯერად მწკრივს აღმოაჩნდა ისეთი უარყოფითი თვისება, საზოგადოდ, რომლის ანალოგი არ შეიძლება გააჩნდეს ერთი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს მწკრივს. ამას ეძღვნება ნაწილი II.

სახელდობრ, 1971 წელს გამოქვეყნდა R. ფეფერმანის ნაშრომი [72], რომელშიც დადგენილია ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული ისეთი $F(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს ორჯერად $S[F]$ მწკრივს არ გააჩნია მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის ერთი წერტილიც კი!

2017 წელს ომარ ძაგნიძემ გამოაქვეყნა ნაშრომი [66], სადაც განვითარებულია სრულიად ახალი მეთოდი, რომლის მიხედვით n -განზომილებიან $[-\pi, \pi]^n$ კუბში ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, ფუნქციასთან ასოცირდება

თითოეული ცვლადის მიმართ ფურიეს n რაოდენობის $S[f]_1, \dots, S[f]_n$ მწკრივი, რომელთა კოეფიციენტები დამოკიდებულია დანარჩენ $n-1$ რაოდენობის ცვლადზე.

დადგენილია ასოცირებული მწკრივების წერტილზე კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. კერძოდ, დადგენილია ჩ. ფეფერმანის უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული $S[f]_1$ და $S[f]_2$ მწკრივების კრებადობა $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის თითქმის ყველა (x, y) წერტილზე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ! ამასთან ერთად, აღნიშნულია ჰანტის თეორემის [75] მართებულობა ორი ცვლადის $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, კლასის ფუნქციასთან ასოცირებული მწკრივებისთვის (იხ. თეორემა 6.3.4).

გარდა ამისა, დადგენილია: $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად f ფუნქციასთან ასოცირებული ორივე $S[f]_1$ და $S[f]_2$ მწკრივის შეჯამებადია რიმანის მეთოდით თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. თეორემები 6.4.2 და 6.4.3).

ამით მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის დასაბამი მიეცა სრულიად ახალ მიმართულებას ფურიეს ერთგანზომილებიან ცვლადკოეფიციენტებიან მწკრივთა თეორიაში!

რადგან ჯამებადი ფუნქციის მწკრივი კრებადია ამ ფუნქციის გლუვობის წერტილზე, თუკი ასეთი წერტილი გააჩნია ფუნქციას (იხ. თეორემა 4.10.1), ამიტომ ბუნებრივად გაჩნდა საჭიროება რიმანის აზრით გლუვობის ცნების გავრცელებისა ორი ცვლადის ფუნქციებზე, რასაც ეძღვნება სარეცენზიო წიგნის III ნაწილი.

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის შემოღებულია გლუვობის ცნებანი: ერთობლივად ორი ცვლადის მიმართ, თითოეული ცვლადის მიმართ, თითოეული ცვლადის მიმართ კუთხურად და თითოეული ცვლადის მიმართ განზოგადებულ კუთხურად.

დადგენილია, რომ ერთობლივად ორი ცვლადის მიმართ გლუვობა იწვევს ყველა სხვა სახის გლუვობას, ხოლო განზოგადებული კუთხური გლუვობა იწვევს ცვლადთა ერთობლიობით გლუვობას (იხ. თეორემა 7.8.1). ეს თეორემა საშუალებას იძლევა დავასკვნათ ფუნქციის გლუვობა, მისი თითოეული ცვლადის მიმართ განზოგადებული კუთხური გლუვობისას!

გარდა ამისა, რადგან არსებობს ერთი ცვლადის ყველგან გლუვი ფუნქცია, რომელსაც წარმოებული გააჩნია მხოლოდ ნულზომიან სიმრავლეზე, ამიტომ ავტორს განხილული და დადგენილი აქვს ორი ცვლადით გლუვობის წერტილზე ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები: ექსტრემუმის არსებობა, სიმეტრიულად დიფერენცირებადობა, ერთ-ერთი მხრიდან დიფერენცირებადობა.

კარგადაა ცნობილი ის მრავალფეროვნება, რაც თანმდევია მრავალგანზომილებიანი ანალიზისთვის. უფრო კონკრეტულად: არსებობს ორმაგი მიმდევრობის და, შესაბამისად, ორმაგი მწკრივის კრებადობის სხვადასხვა ცნება. ორმაგი მწკრივისთვის არსებობს კრებადობა: მართკუთხედების მიხედვით, კვადრატების მიხედვით, წრიული და სამკუთხოვანი. წარმოდგენილი წიგნის ავტორი იხილავს მხოლოდ მართკუთხედების მიხედვით და კვადრატების მიხედვით კრებადობას.

IV ნაწილის 8.1-8.8 პარაგრაფებში თავმოყრილია ორმაგი ტრიგონომეტრიული, კერძოდ, ფურიეს ორმაგ მწკრივებზე სხვადასხვა მონოგრაფიასა თუ საჭურნალო ლიტერატურაში გამოცემულია ის შედეგები, რომლებიც შეესაბამება ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ მი-

რითად შედეგებს: კანტორ-ლემების თეორემას, დანჟუა-ლუზინის თეორემას, ზესელის იგივეობას და უტოლობას, პარსევალის ტოლობას და რისი-ფიშერის თეორემას, რიმან-ლემების თეორემას ფურიეს კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობის შესახებ. წიგნის ავტორმა ამით დააკაყოფილა მკითხველის ბუნებრივი სურვილი იმის შესახებ, რომ კომპაქტურად იხილოს კლასიკური შედეგების გავრცელება ორმაგ მწკრივებზე.

პარაგრაფში 8.9 დადგენილია ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს განმეორებითი ორივე მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა (იხ. თეორემა 8.9.1). კერძოდ, ამ თეორემას ადგილი აქვს ჩ. ფეფერმანის უწყვეტი ფუნქციისთვის (იხ. თეორემა 8.9.2), რომლის ფურიეს ორმაგ მწკრივს არ გააჩნია, მართკუთხედების მიხედვით, კრებადობის ერთი წერტილიც კი (იხ. პარაგრაფი 6.3 და კერძოდ, დასკვნა 6.3.5).

პარაგრაფებში 8.10, 8.11 და 8.12 მოცემულია ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენა, მართკუთხედებით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა და კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა – ნიკოლოზ (კიტა) თევზაძის თეორემა 8.12. 1. აქვე (იხ. შედეგი 8.12.5) მოცემულია ჩ. ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციის ყველა თვისებათა ნაკრები.

ზემოთ აღნიშნული იყო ლემების მნიშვნელოვანი თეორემა იმის შესახებ, რომ ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება, თუნდაც ის განშლადი იყოს ყველგან, მართლზომიერია (იხ. თეორემები 4.15.1, 4.15.2).

ამ თეორემების გავრცელება ფურიეს ორმაგ მწკრივებზე მოცემულია ომარ ძაგნიძის 2014 და 2017 წლების შრომებში [65] და [67]. აქ დამტკიცებულია

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn}$$

მწკრივის კრებადობა და

$$\sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{c_{mn}}{mn} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn}$$

ტოლობა, სადაც c_{mn} წარმოადგენს ფურიეს ორმაგი ექსპონენტური მწკრივის კოეფიციენტს. ეს

შედეგი შეესაბამება ფურიეს ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ შედეგებს: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ კრება-

დია და

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

აქვე აღნიშნულია (იხ. პარაგრაფი 8.15), რომ ლოკალიზების რიმანის პრინციპს ადგილი არ აქვს ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობისას.

პარაგრაფი 8.16 ეძღვნება გამორჩეულად საყურადღებო შედეგს: ფურიეს ორმაგი მწკრივის რიმანის ერთობლივი და განმეორებითი მეთოდებით თითქმის ყველგან შეჯამებადობის შესახებ (იხ. თეორემები 8.16.2 და 8.16.3), რაც წარმოადგენს ფურიეს ერთჯერადი მწკრივის რიმანის მეთოდით თითქმის ყველგან შეჯამებადობის შესახებ კლასიკური შედეგის (იხ. თეორემა 5.26.1) გავრცელებას ფურიეს ორმაგ მწკრივებზე. აქ არსებითია ის, რომ ომარ ძაგნიძე 8.16.2 და 8.16.3 თეორემების დამტკიცებისას არ იყენებს ფურიეს ერთჯერადი მწკრივის რიმანის მე-

თოდით შეჯამებადობის დადგენისას რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულის რაიმე განზოგადებას – სწორედ ასეთი განზოგადების ვერ დადგენამ გამოიწვია პრობლემის გადაწყვეტის დაყოვნება!

აღსანიშნავია, რომ რადგანაც წინამდებარე წიგნი (პირველ გამოცემასთან ერთად) წარმოადგენს ერთადერთ ქართულენოვან სრულ სახელმძღვანელოს ფურიეს მწკრივთა თეორიაზე, ის ძალზედ მნიშვნელოვანია უმაღლესი სასწავლებლების მათემატიკური სპეციალობის სტუდენტებისათვის, რომლებსაც სურთ გაცნონ ან ცოდნა გაიდრმავონ ფურიეს მწკრივთა თეორიის მიმართულებით. პირადად მე საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის სილაბუსის შედგენისას ვისარგებლე აღნიშნული სახელმძღვანელოს პირველი გამოცემით. ამ წიგნის გაფართოებული ვარიანტი ასევე დიდ სამსახურს გაუწევს პროფესორ-მასწავლებლებს ფურიეს მწკრივთა თეორიაში ახალი, გაფართოებული კურსის შესადგენად.

მიმაჩნია, რომ ომარ ძაგნიძის ეს წიგნი წარმატებით შეასრულებს გზამკვლევის ფუნქციას ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ბაკალავრებისთვის, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისთვის თბილისის, ქუთაისის, ბათუმისა და თელავის უნივერსიტეტებში.

სრულიად მხარს ვუჭერ ო. ძაგნიძის წიგნის „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ დასტამბვას ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობაში.

თბილისი
27 მარტი, 2023 წ.

პროფესორი ალექსანდრე მესხი



თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის
მათემატიკური ანალიზის განყოფილების ხელმძღვანელი,
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტის პროფესორი,
საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის პრეზიდენტი

გიორგი ონიანი



ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტის პროფესორი